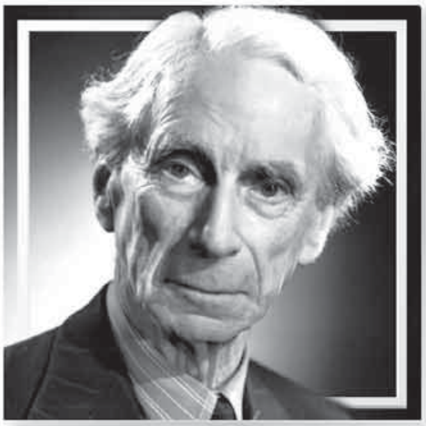
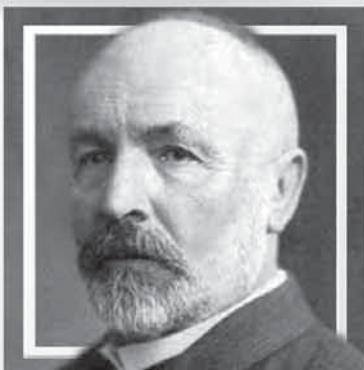
محمدرضا امیری، دانشجوی ترم آخر رشته ریاضیات و کاربردها

نظریۀ مجموعه‌ها

چیستی و چرایی



راسل



کانتور

اشاره

نظریۀ مجموعه‌هـــا بعد از «منطق ریاضی» از درس‌های اصلـــی و جزو مهم‌ترین موضوع‌های ریاضیات، و از ارکان و مبانی ریاضیات اســـت. تقریباً تمامی شاخه‌های ریاضیات به نوعی از این درس بهره می‌برند. امروزه نظریۀ مجموعه‌ها جزئی تفکیک‌ناپذیر از علم حســـاب،جبر، آنالیز، احتمال، جبرخطی و ... به‌شمار می‌آید و کاربرد آن در هر یک از این علوم ضروری است، در این فرصت تا حدی با چیستی و چرایی‌های این نظریه آشنا شویم.

«نظریـــۀ مجموعه‌هـــا»[1] در دهۀ ۱۹۴۰ به‌عنـــوان موضوعی بحث‌انگیز بین ریاضی‌دانان مطرح بود ودر دهۀ ۱۹۵۰ رسماً مورد استفاده قرار گرفت. «نظریۀ طبیعی مجموعه‌ها» اولین پیشرفت و گسترش نظریۀ مجموعه‌ها محسوب می‌شود.

نظریۀ طبیعی مجموعه‌ها بر پایۀ درکی غیررسمی و بی‌قاعده از مفهوم مجموعه به‌عنوان گردایه‌ای از اشـــیا (که عضو[2] یا عنصر گفته می شـــود) اســـتوار بود، در حالی‌که «نظریۀ اصل موضوعی مجموعه‌ها» تنهـــا از واقعیت‌هایی در مورد مجموعه‌ها و عضویت اســـتفاده می‌کرد که از طریق یک سلســـله اصول موضوع تعریف شـــده و قابل اثبات بودند. این اصول موضوع از درک ما از مفهوم دســـته، گردایه یا مجموعه‌ای از اشـــیا و اعضایشان نتیجه شدند. یکـــی از هدف‌های تنظیم این اصول فـــرار از پارادوکس‌هایی بود

که در این زمینه مطرح می‌شدند. نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها از آغاز با پارادوکس‌های متعددی از جمله پارادوکس معروف **راسل**[۳] (ضمیمه ۲ مقاله) مواجه شد.

امروزه در ریاضیات مجموعه‌ها بسیار اهمیت دارند. در ریاضیات جدید، بخش عمده‌ای از ابزارهای ریاضی، مانند عدد، رابطه، تابع و غیره، بر پایهٔ مجموعه‌ها تعریف شده‌اند. نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها در اواخر قرن ۱۹ توسط **جرج کانتور** پایه‌گذاری شد تا به ریاضی‌دانان امکان دهد که با مجموعه‌های نامتناهی کار کنند. به کمک چنین نظریه‌ای می‌توان روی مجموعه‌ها هر عملی را بدون محدودیت انجام داد یا هر مجموعه‌ای را بدون محدودیت در نظر گرفت که این ما را به سوی پارادوکس‌هایی چون پارادوکس راسل سوق می‌دهد. در حقیقت در ادامهٔ گسترش نظریهٔ مزبور این سؤال‌ها برای ریاضی‌دانان پیش‌آمد که:

- آیا واقعاً چیزهایی که ما به‌عنوان مجموعه در نظر می‌گیریم، مجموعه هستند؟
- چه چیزی را می‌توان به‌عنوان مجموعه درنظر گرفت و چه چیزی را نمی‌توان؟
- معیار ما برای اینکه بگوییم یک شی ریاضی مجموعه است یا نه چیست؟

در پاسخ به همین پرسش‌های اساسی بود که نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها گسترش یافت. به هر حال، امروزه ریاضی‌دانانی که از نظریهٔ مجموعه‌ها به‌عنوان یک شاخه از ریاضیات صحبت می‌کنند، عموماً بر این باورند که نظریهٔ جرج کانتور عملاً درگیر پارادوکس‌ها نمی‌شود که این موضوع خود مطلبی قابل بحث است. او از برخی از این پارادوکس‌ها آگاه بود، ولی آن‌ها را بیان نکرد. چرا که معتقد بود، این پارادوکس‌ها نظریهٔ مجموعه‌های او را بی‌اعتبار می‌سازند. البته اطمینان از این مطلب دشوار است، زیرا او اصل موضوع یا قاعده‌ای را بیان نکرده است.

در نظریهٔ طبیعی مجموعه‌ها، مجموعه به‌عنوان یک دسته از اشیای مشخص توصیف می‌شود. به این اشیا که مجموعه را تشکیل می‌دهند، اعضا یا عناصر مجموعه می‌گوییم. عضوهای مجموعه می‌توانند هر چیزی باشند؛ از انواع عددها و افراد جامعه گرفته تا خود مجموعه‌ها. برای مثال، عدد ۴ عضوی از مجموعهٔ عددهای زوج است. مجموعهٔ عددهای زوج مجموعه‌ای بزرگ و نامتناهی است که این نشان می‌دهد، نیازی نیست که مجموعه متناهی باشد؛ یعنی به تعدادی متناهی عضو داشته باشد.

اگر شیء x متعلق به مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم: «مجموعهٔ A شامل عنصر x است.» یا: «x متعلق است به مجموعهٔ A.»

در این صورت می‌نویسیم: «$x\in A$»

$\in$ نماد تعلق یا عضویت است که از حرف «اِپسیلون» یونانی گرفته شده و به‌وسیله پئانو معرفی شده است.

اگر x عضوی از مجموعهٔ A نباشد می‌نویسیم: «$x\notin A$».

بنابراین مجموعه به صورت کامل با اعضایش معرفی می‌شود. مثلاً مجموعه عددهای ۵، ۳، ۲ با مجموعهٔ تمام عددهای اول کوچک‌تر از ۶ برابر است.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که دو مجموعه چه زمانی با یکدیگر برابرند؟

برابری یا تساوی در مجموعه‌ها (بین دو مجموعه) این‌گونه تعریف می‌شود: «**دو مجموعهٔ A و B با یکدیگر برابرند، هرگاه هر عضو دلخواه A در B و هر عضو دلخواه B در A باشد و می‌نویسیم:** «$B=A$»

اما آیا مجموعه‌ای هم وجود دارد که دارای هیچ عضوی نباشد؟ بله، و به آن مجموعهٔ «تهی» یا «نول» می‌گوییم و آن را با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهیم. از آنجا که مجموعه دقیقاً با اعضایش شناخته می‌شود، می‌توان منحصربه‌فرد بودن مجموعهٔ تهی را تضمین کرد.

به راستی چه مشکلی در نظریه‌ای که تا به حال ارائه داده‌ایم وجود دارد؟ مشکل در ساختار مجموعه است؟ و اینکه واقعاً مجموعه چیست؟ در نظریه‌ای که ارائه شد، برداشتی که از یک مجموعه می‌شود، مانند کیسه‌ای است که تعدادی (متناهی یا نامتناهی) عضو را در آن قرار می‌دهیم.

آیا به راستی هرچه که در بین دو آکولاد قرار دهیم، یک مجموعه نام دارد؟ یا به‌طور دقیق‌تر آیا می‌توانیم هر مجموعه‌ای را به دلخواه خودمان تشکیل دهیم؟ نظرات و پاسخ‌های خودتان را برایمان ارسال کنید.

ضمیمه

۱. **پارادوکس یا متناقض‌نما** به هر گزاره یا نتیجه‌ای گفته می‌شود که با گزاره‌های قبلی گفته شده در همان نظریه یا دستگاه نظری، یا با یکی از باورهای قوی پیش‌زمینه، شهود عقلی یا باور عمومی در تناقض باشد. اگر پارادوکس به معنای تناقض با یکی از گزاره‌های همان نظریه‌ای باشد که پارادوکس در آن پدید آمده است، این امر ضعفی جدی برای آن نظریه محسوب می‌شود و آن را بی‌اعتبار می‌کند. اما پارادوکس‌های بسیاری وجود دارند که نه با دستگاه نظری که از آن پدید آمده‌اند، بلکه با باور عمومی ما در تناقض‌اند. برای این قبیل پارادوکس‌ها در واقع این نام دقیقی نیست.

پارادوکس در منطق به حکم یا احکامی ظاهراً صحیح گفته می‌شود که به تناقضی می‌انجامند یا با شهود مطابقت نمی‌یابند. در عین حال، به جملات متناقض و حتی مخالفی که یک حقیقت واحد را بیان می‌کنند نیز پارادوکس می‌گویند.

۲. پارادوکس راسل: نامه‌ای که راسل به همکار خود **فرگه** نوشت، بسیار مشهور است. او این نامه را در بهار سال ۱۹۰۱، هنگامی که فرگه روی اثر خود، یعنی «اصول ریاضیات» کار می‌کرد، فرستاد و در آن پارادوکسی را مطرح کرد که بعدها به نام پارادوکس راسل شناخته شد. این پارادوکس از مشهورترین پارادوکس‌های تاریخ ریاضیات است. پارادوکس او چنین بود: «آیا مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند، عضوی از خودش است یا نه؟!» به عبارت دیگر، مجموعهٔ R را مشتمل بر همهٔ مجموعه‌هایی در نظر بگیرید که عضو خودشان نیستند؛ یعنی:

R={x|عضو خودش نیست x}

حال آیا R عضوی از خودش است یا خیر؟

۱. اگر R عضوی از خودش باشد، پس واجد شرایط اعضای R است؛ یعنی عضو خودش نیست!

۲. اگر R عضوی از خودش نباشد، پس واجد شرایط اعضای R نیست؛ یعنی عضو خودش است!

اینجا نیز روشن نیست که در نهایت این مجموعه (یعنی R) عضو خودش هست یا خیر. صورت‌های گوناگونی از این پارادوکس وجود دارند. برای مثال، یک شکل سادهٔ آن به این صورت است: «فرض کنید که در شهری آرایشگری وجود دارد که فقط و فقط سر کسانی را اصلاح می‌کند که خودشان سر خود را اصلاح نمی‌کنند. به علاوه، هر کسی که خودش سر خودش را اصلاح نمی‌کند، سرش را پیش این آرایشگر اصلاح می‌کند! حال به عقیدهٔ شما این آرایشگر سر خودش را اصلاح می‌کند یا خیر؟»

پاسخ بسیار حیرت‌انگیز است: «اگر این آرایشگر سر خودش را خود اصلاح نکند، پس در زمرهٔ افرادی است که سر خودشان را خود اصلاح نمی‌کنند. در نتیجه سر خودش را اصلاح می‌کند! اما اگر این آرایشگر سر خودش را خود اصلاح کند، پس در زمرهٔ افرادی است که سر خودشان را اصلاح می‌کنند. در نتیجه سر خودش را اصلاح نمی‌کند!»

در حقیقت روشن نیست که در نهایت این آرایشگر با سر خود چه می‌کند! اصلاحش می‌کند یا خیر؟

***پی‌نوشت‌ها**

1. Set theory
2. Element

۳. پارادوکس راسل در پشت جلد شماره قبل مجله تشریح شده است.

***منابع**

۱. شهریاری، پرویز و دیگران (۱۳۹۴). **دانشنامهٔ ریاضی**. شرکت انتشارات کانون فرهنگی آموزش. تهران.

۲. لین، شووینگ و لین، یوفنگ (۱۳۹۳). **نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن**. ترجمهٔ عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی. تهران.

۳. کتاب درسی آمار و احتمال پایهٔ یازدهم رشتهٔ ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی.

4. www.danesh.roshd.ir

ریاضیات در چند دقیقه

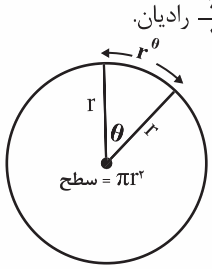
غلامرضا یاسی‌پور

زاویه‌های رادیانی

ریاضی‌دانان در مقابل واحدهای باستانی درجه، دقیقه و ثانیه‌های کمان، غالباً زاویه‌ها را بر حسب واحدهایی موسوم به «رادیان» (radian) بیان می‌کنند. رادیان‌ها که مبتنی بر هندسهٔ دایره هستند، امتیازهای بسیاری دارند. به‌ویژه آن‌ها کار با توابع مثلثاتی را بسیار ساده‌تر می‌کنند.

مفهوم شهودی رادیان به بهترین وجه با بررسی دایره‌ای به شعاع ۱ درک می‌شود. در این صورت زاویهٔ بین دو خط برحسب رادیان، برابر است با طول کمانی که بین دو خط با دایره‌ای به شعاع ۱، به مرکز واقع بر تقاطع دو خط‌مان رسم شده است.

از آنجا که اندازهٔ پیرامون دایره توسط $C=۲\pi r$ به دست می‌آید، اگر داشته باشیم: $r=۱$، در این صورت $C=۲\pi$ خواهد شد. بنابراین کمان x از دایره دارای زاویهٔ θ رادیان است که در آن داریم: $\theta=۲\pi x$. برای مثال، برش دایره به چهار قطعهٔ برابر، زاویهٔ قائمه‌ای به‌دست می‌دهد که برابر است با ۲π ضرب در $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان.



یک پیامد ظریف: اگر قطاع دایره‌ای به شعاع r، مثلاً یک تکه کیک، دارای زاویهٔ θ رادیان باشد، در این صورت طول کمان دایروی کیک صرفاً r^{θ} است. بنابراین زاویه‌هایی که با رادیان اندازه‌گیری می‌شوند، طریقی ساده در اندازه‌گیری طول کمان‌ها ارائه می‌دهند.